



# RBES

Revista Brasileira de  
Engenharia e Sustentabilidade

ISSN 2448-1661

Pelotas, RS, UFPel-Ceng

<https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/RBES/index>

**v.9, n.3, p.21-27, jul. 2021**  
**[X ERMAC-RS]**

## SISTEMAS DINÂMICOS COM DERIVADAS FRACIONÁRIAS APLICADO A PROBLEMAS DE POPULAÇÕES INTERAGENTES

TAVARES, C. A.<sup>1</sup>; LAZO, M. J.<sup>1</sup>;

<sup>1</sup>Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande, RS.

**Palavras-chave:** Dinâmica de populações, equações diferenciais fracionárias, modelo sird, coronavírus (covid-19)

### Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal investigar o uso do cálculo fracionário na modelagem de epidemias de populações interagentes. Em particular, propomos uma generalização do modelo SIR com derivadas fracionárias para descrever a dinâmica de uma epidemia em duas cidades com populações interagentes. Em especial, analisaremos a dinâmica da COVID-19 nos municípios de Pelotas e Rio Grande, que são cidades vizinhas e relativamente isoladas geograficamente do restante do estado do Rio Grande do Sul.

## DYNAMIC SYSTEMS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES APPLIED TO INTERAGENT POPULATIONS PROBLEMS

**Keywords:** population dynamics, fractional differential equations, sird model, coronavirus (covid-19)

### Abstract

The present work has as main objective to investigate the use of fractional calculus in the modeling of epidemic outbreaks of interacting populations. In particular, we propose a generalization of the SIR model with fractional derivatives to describe the dynamics of the COVID-19 epidemic outbreak in two cities with interacting populations. In special, we consider the dynamics of COVID-19 in the municipalities of Pelotas and Rio Grande, which are neighboring cities and are relatively geographically isolated from the rest of the state of Rio Grande do Sul.

## INTRODUÇÃO

A principal motivação para o estudo das equações diferenciais é que, mesmo as equações mais simples, descrevem modelos físicos importantes, como, por exemplo, o crescimento de uma população, a proliferação de doenças, o sistemas massa-mola, dentre outros (VARALTA, 2014). Neste contexto, o cálculo fracionário também conhecido como cálculo de ordem não inteira, desempenha um papel de crescente destaque. Desde o início da teoria do cálculo diferencial e integral, matemáticos como Euler e Liouville desenvolveram suas ideias sobre o cálculo de derivadas e integrais de ordem não inteiras. Apesar de antigo, só nas última décadas verificou-se o grande potencial do uso do cálculo fracionário na modelagem e descrição de fenômenos com características não-locais. Neste contexto, fenômenos físicos que não eram bem explicados por modelos baseados no cálculo tradicional, têm sido modelados por derivadas e integrais de ordem fracionária, apresentando resultados melhores (SABATIER; AGRAWAL; TENREIRO MACHADO, 2007).

Dentre as áreas recentes de aplicação do cálculo fracionário, pode-se destacar a modelagem de epidemias, na qual propõe-se modelos que possam ajudar a traçar políticas de controle dessas doenças de forma a erradicá-las o mais rápido possível. Com base nessa premissa, em virtude do cenário atual, onde o mundo enfrenta a pandemia causada pelo coronavírus (COVID-19), decidiu-se nesse trabalho estudar o modelo estruturado de epidemia compartimental do tipo SIRD para populações interagentes. O modelo SIRD é uma generalização do conhecido modelo compartimental SIR que inclui a taxa de mortes da população, denotada por  $D$ .

Nesse contexto, o objetivo do presente trabalho é analisar os dados referentes ao número de casos confirmados e mortes causadas pela COVID-19 nos municípios de Pelotas e Rio Grande. Por serem cidades vizinhas e haver interações entre as populações (fluxo de pessoas movendo-se entre as duas cidades), propomos um modelo interagente. A solução do modelo será obtida através do software Python, e os dados relativos as populações empregados neste trabalho foram extraídos do site da Prefeitura do Rio

Grande e da Prefeitura de Pelotas.

Decorrente da importância de compreender a proliferação de doenças infecciosas no estudo da dinâmica de populações, encontra-se na literatura uma quantidade significativa de trabalhos que abordam o assunto. Em especial, apontamos alguns estudos relacionados à dinâmica da COVID-19 no Brasil e uma proposta de abordagem para populações distintas interagentes.

O artigo de Almeida (2018) têm como ideia principal focar em modelos que consistem em equações diferenciais fracionárias para descrever a dinâmica de certas epidemias. Para o trabalho a população foi dividida em quatro partes, suscetíveis, exposta, infecciosa e recuperada (SEIR). O autor apresenta um estudo analítico, mostrando que o modelo possui dois pontos de equilíbrio (equilíbrio livre de doença e equilíbrio endêmico).

Em Silva (2020), foram analisados dados referentes ao número de casos confirmados e mortes causadas pela COVID-19 nos estados do Paraná (PR), Rio Grande do Sul (RS) e Santa Catarina (SC). O objetivo do estudo é compreender alguns aspectos da disseminação da doença na região Sul do Brasil a partir da obtenção do Número Efetivo de Reprodução ( $Re$ ) de cada estado, usou-se para isso o modelo SIRD. Mostrou-se que esse modelo, apesar da sua simplicidade, descreve com precisão os dados do passado e possibilita fazer projeções confiáveis para as tendências da epidemia em cada localidade. Para os resultados mostrou-se que, até o dia 6 de junho de 2020, SC era o único estado da região Sul com  $Re < 1$ , o que indica que o número de novos casos tende a diminuir na hipótese desse cenário ser mantido. Por outro lado, PR e RS apresentam  $Re > 1$ , de forma que o crescimento do número de infectados pode continuar por algumas semanas caso novas medidas não sejam tomadas.

Finalmente, no contexto de populações interagentes, no trabalho Lazo e Cezaro (2020) é proposto um modelo SEIR estruturado de interação de  $n$  populações distintas para descrever a propagação de doenças pandêmicas como a COVID-19. Para os autores o modelo proposto tem a flexibilidade de incluir comunidades geograficamente separadas, bem como levar em consideração o envelhecimento

dos grupos da população e suas interações. Foram mostrados suposições distintas sobre a dinâmica do modelo proposto que levam a uma curva semelhante a um platô da população infectada, refletindo dados coletados em grandes países como o Brasil. Tais observações apontam para a seguinte conjectura: “A difusão da doença COVID-19 das capitais para o interior do Brasil pode ser responsável pelo surgimento de um platô na curva de infectados”.

## MATERIAL E MÉTODOS

### Cálculo Fracionário

O cálculo de ordem não-inteira, conhecido como Cálculo Fracionário, teve seu início em 30 de setembro de 1695 em uma carta de L'Hôpital à Leibniz. Além de Leibniz e L'Hôpital, outros brilhantes matemáticos, tais como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville, entre outros, estudaram o assunto levando às primeiras definições de derivadas e integrais fracionárias (OLIVEIRA, 2012). Apesar de tão antigo quanto o cálculo convencional, foi apenas nas últimas três décadas que o Cálculo Fracionário despertou mais atenção devido as suas aplicações nas mais diversas áreas. Isso se deve ao fato de que a modelagem realista de um fenômeno físico não depende apenas do tempo instantâneo, mas também da história do tempo anterior. Ultimamente, uma grande quantidade de estudos foi desenvolvida sobre a aplicação de equações diferenciais fracionárias, em várias áreas das ciências aplicadas, tais como mecânica de fluidos, viscoelasticidade, biologia, física, engenharia, etc (ARQUB; EL-AJOU, 2012).

Neste trabalho utilizaremos a definição da derivada fracionária segundo Caputo pois dentre as várias definições existentes de derivadas fracionárias, a definição de Caputo é a que apresenta mais vantagens em relação a aplicações no mundo real.

Definição: (Caputo) De acordo com Lazo (2012), a derivada fracionária à esquerda de Caputo de ordem  $\alpha > 0$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) é definida por:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{1+\alpha-n}} dt \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+) \text{ Eq. (1)}$$

onde são derivadas ordinárias de ordem inteira  $n$ . Em especial, para  $\alpha=1$  a derivada de Caputo se reduz a uma derivada usual de primeira ordem.

## O modelo SIRD fracionário para duas populações diferentes

Em 1927, Kermack e McKendrick, publicaram o artigo intitulado “A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics”, no qual introduziram o modelo epidemiológico conhecido como SIR. Esse modelo descreve a disseminação de doenças infecciosas em uma população dividida em subgrupos de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, com cada um desses grupos tendo sua dinâmica descrita por uma Equação Diferencial (SILVA, 2020). Embora o modelo de Kermack e McKendrick descreva a essência da dinâmica de uma epidemia, ele inclui apenas os elementos principais do processo. Modelos mais complexos incluem outras categorias de indivíduos na população, como o modelo SIRD (em inglês: Susceptible-Infected-Recovered-Dead), que divide as pessoas removidas em Recuperadas e Mortas. Com isso, outros parâmetros são incluídos, nesse caso as taxas de recuperação e mortalidade.

Vamos considerar o caso de duas populações distintas interagentes (populações em cidades vizinhas). Seja  $N_i$  o número de indivíduos na população  $i$  ( $i = 1, 2$ ) e  $N_T = N_1 + N_2$  a população total integrada. Sejam  $S_i, I_i, R_i$  e  $D_i$  as frações, em relação ao  $N_i$ , da população da população  $i$  que são, suscetíveis, infectados, recuperados e mortes, respectivamente, no tempo  $t$ . No modelo considera-se, a evolução temporal dada pelo seguinte sistema dinâmico para  $i = 1, 2$ .

$${}_0^C D_t^\alpha S_i = - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j + \mu_i (1 - S_i)$$

$${}_0^C D_t^\alpha I_i = \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j - (\gamma_i + \kappa_i + \mu_i) I_i \text{ Eq. (2)}$$

$${}_0^C D_t^\alpha R_i = \gamma_i I_i - \mu_i R_i$$

$${}_0^C D_t^\alpha D_i = \kappa_i I_i$$

onde  $0 < \alpha \leq 1$  é a ordem da derivada,  $\beta_{ij}$  é a taxa de transmissão da doença (proporcional à taxa média de contato na população e dentro da população),  $\kappa_i$  é a taxa de mortes da população infectada pela doença,  $Y_i$  é o inverso do período infeccioso médio, para  $i=1,2$ . Além disso, assume-se que as taxas de mortalidade  $\mu_i$  é igual as taxas de natalidade, de forma que o  $N_i$  total da população é constante durante as doenças. Portanto, tem-se que  $S_i + I_i + R_i + D_i = 1$  (LAZO; CEZARO, 2020).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

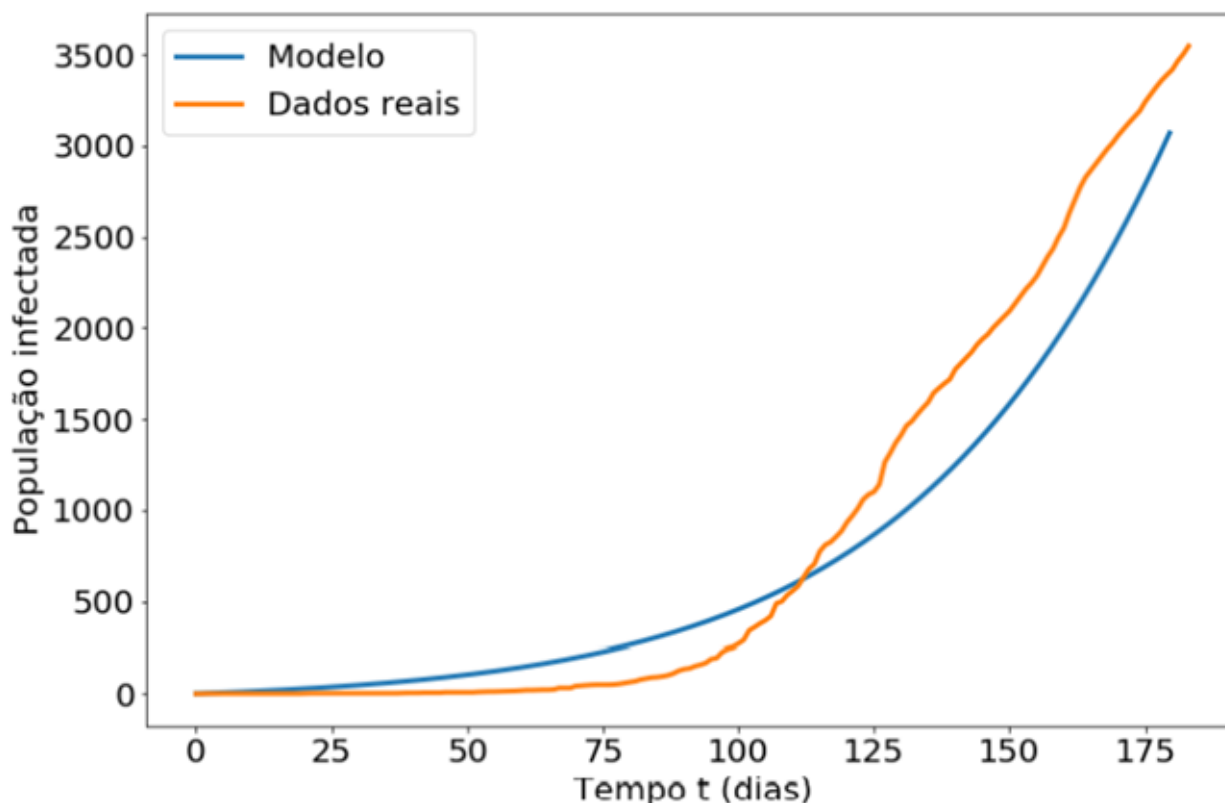
Nesta seção estão sendo realizadas análises e comparações à cerca da Eq. 2 para derivadas de ordem inteira ( $\alpha = 1$ ) e fracionária ( $0 < \alpha \leq 1$ ). Primeiro, considera-se algumas propriedades do modelo fracionário para o caso particular sem a interação entre cidades. Na sequência é analisado o modelo fracionário com a interação entre duas populações. Para a comparação com dados reais, utilizamos dados obtidos através do site Prefeitura do Rio Grande e Prefeitura de Pelotas.

Antes de considerar a interação entre duas cidades. Foi feita uma análise preliminar de apenas

uma única cidade (neste caso  $N_2 = 0$ ). Neste caso consideramos dados reais da população infectada e recuperada, ou seja, o número total de casos registrados em Rio Grande, no período de tempo ( $t$ ) de 180 dias. Para o estudo, considerou-se o tempo inicial ( $t = 0$ ), e o tempo final ( $t = 180$ ).

A escolha do tempo inicial, foi feita para o registro do primeiro caso de pessoas infectadas no município, sendo computado em 23 de março de 2020. Na Figura 1 a curva laranja corresponde aos dados reais da população de Rio Grande, enquanto que a curva esboçada em azul corresponde ao modelo SIRD, para a derivada de ordem inteira ( $\alpha = 1$ ). Os parâmetros utilizados no modelo na Figura 1 foram  $Y_1=0.5$  (supomos um tempo médio de 2 dias para o infectado ser diagnosticado e isolado do restante da população) e, por simplicidade,  $\kappa_1 = \mu_1 = 0.0$ . Com esses parâmetros, encontramos que o valor  $\beta_{11} = 0.525$  é o que melhor descreve os casos reais. Neste caso, para a população de Rio Grande, tem-se que o número de reprodução básica é  $R_0 = 1.05 > 1$ , portanto, o número de indivíduos infectados está em crescimento (SILVA, 2020).

Figura 1: Representação dos dados reais da população de Rio Grande no Python



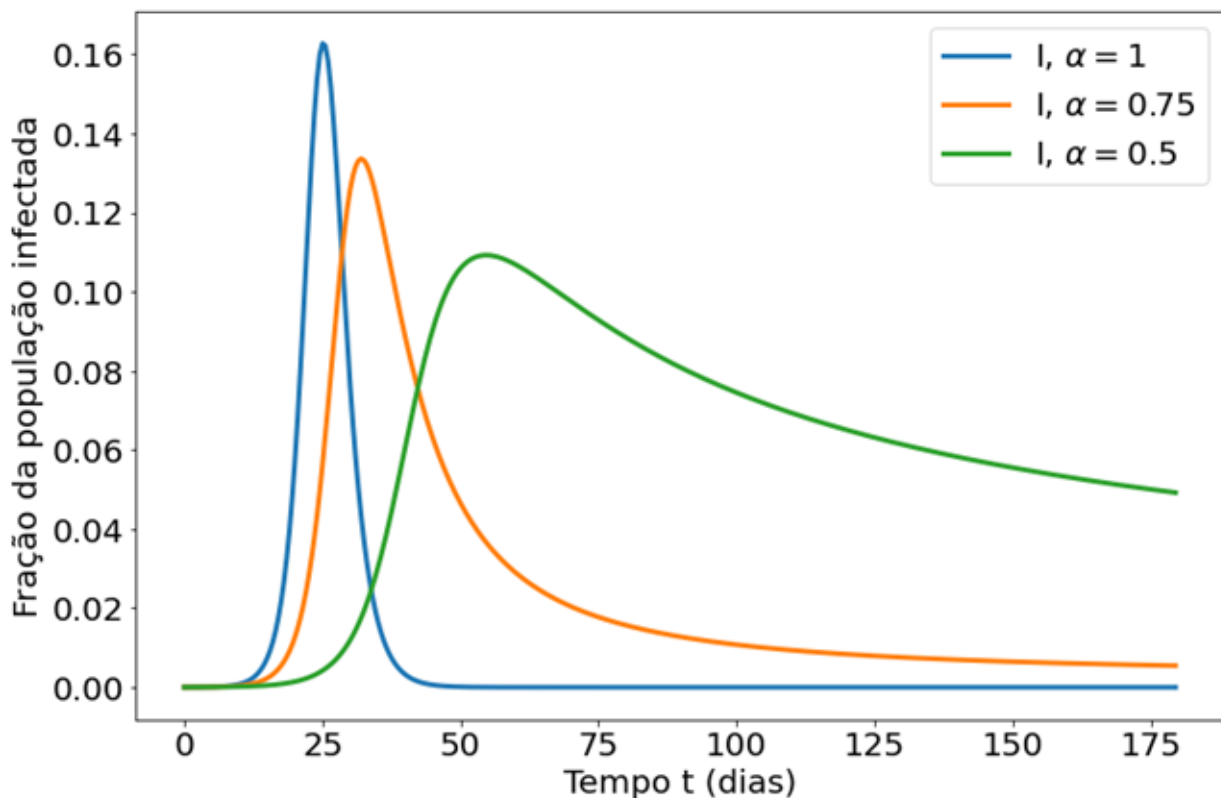
Fonte: Prefeitura do Rio Grande

Finalmente, pode-se observar que a curva não descreve tão bem os casos reportados pelos dados oficiais, uma vez que a dinâmica mostra um crescimento linear. Segundo Lazo e Cezaro (2020) esse crescimento linear pode ser indício da difusão da doença para cidades vizinhas e entre bairros de uma mesma cidade. Este fato leva a uma dinâmica com crescimento anômalo, o que motiva a investigação de modelos de populações

interagentes e de modelos fracionários.

Os efeitos na dinâmica introduzidos pelas derivadas fracionárias pode ser visto na Figura 2. Pode-se observar na Figura 2, que para a derivada de ordem inteira tem-se um pico bem estreito da epidemia. Já no caso das derivadas de ordem fracionária, conforme a ordem  $\alpha$  da derivada diminui, observa-se um alongamento no período da epidemia.

Figura 2: Representação dos dados reais da população de Rio Grande para derivadas de ordem  $\alpha = 1, \alpha = 0.75$  e  $\alpha = 0.5$  no Python

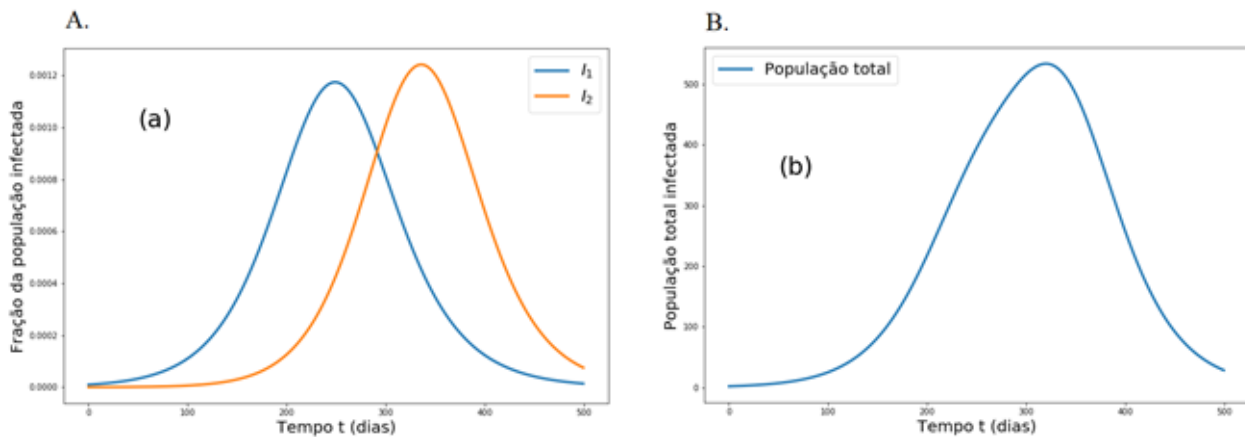


Fonte: : Prefeitura do Rio Grande

Com base na difusão geográfica da doença, decidiu-se analisar a interação entre cidades vizinhas, para o estudo em questão considera-se os municípios de Rio Grande e Pelotas. Note que na Figura 3A tem-se uma diferença no tempo em que acontece a epidemia em

cada cidade, uma vez que o número de infectados foi detectado primeiro no município de Rio Grande, e ocorre uma migração dessa população infectada para a cidade de Pelotas, por conta da interação.

Figura 3. Gráfico da fração da população infectada entre as cidades interagentes de Rio Grande e Pelotas (a); Gráfico da população total infectada por dia (b)



Fonte: Prefeitura do Rio Grande

A Figura 3B representa a soma total dessa população interigente infectada. Os parâmetros utilizados nesta simulação foram  $\Upsilon_1=\Upsilon_2=0.5, \kappa_1=\kappa_2=\mu_1=\mu_2=0.0, \beta_{11}=\beta_{22}=0.525$  e  $\beta_{12}=\beta_{21}=0.000525$  (supomos que 1 em cada 1000 habitantes transita entre as duas cidades diariamente).

## CONCLUSÃO

O objetivo do presente trabalho é investigar o uso do cálculo fracionário na modelagem de epidemias de populações interagentes. Propomos um modelo do tipo SIRD para duas cidades interagentes com derivadas fracionárias. Fizemos algumas análises preliminares, e como continuação do trabalho, iremos analisar os dados referentes ao número acumulado de casos confirmados e mortes causadas pela COVID-19 nos municípios de Pelotas e Rio Grande. Da análise preliminar foi possível observar que o modelo SIRD clássico, sem interação entre cidades e sem derivadas fracionárias, não descreve tão bem os dados oficiais do município de Rio Grande, uma vez que a dinâmica mostra um crescimento linear. Este resultado motiva a investigação mais detalhada do modelo fracionário interigente que propomos.

## LITERATURA CITADA

ALMEIDA, R. Analysis of a fractional SEIR model with treatment. In: Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA) Department of Mathematics, 3810–193,

University of Aveiro, 2010, Aveiro, Portugal.

ARQUB, A.; EL-AJOU, A., Solution of the fractional epidemic model by homotopy analysis method. **Journal of King Saud University– Science**, v. 25, p.73-81, 2013.

LAZO, Matheus. **Introdução ao Cálculo Fracionário**. Apostila não publicada – Instituto de Matemática, Estatística e Física, FURG, Rio Grande – RS.

LAZO, M. J; CEZARO, A. Why can we observe a plateau even in an out of control epidemic outbreak? A SEIR model with the interaction of n distinct populations for Covid-19 in Brazil. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, August 2020.

OLIVEIRA, Daniela dos Santos de. **Introdução ao Cálculo Fracionário**. Tese (Graduação em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande, FURG, Rio Grande – RS.

SABATIER, J.; AGRAWAL, O. P.; TENREIRO MACHADO, J. A.(eds). **Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering**. Springer, Netherlands, 2007.

SILVA, R. M. Using the SIRD model to characterize the Covid-19 spreading in the states of Paraná, Rio Grande do Sul, and Santa Catarina. Scientific Electronic Library Online, 2020

VARALTA, Najla. **Das Transformadas Integrais ao Cálculo Fracionário Aplicado à Equação Logística. Tese (Mestrado em Biometria)** – Universidade Estadual Paulista – Júlio de Mesquita Filho, Botucatu, São Paulo.