



# RBES

Revista Brasileira de  
Engenharia e Sustentabilidade

ISSN 2448-1661

Pelotas, RS, UFPel-Ceng

<https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/RBES/index>

**V.9,N.3, p.8-14**  
**[X ERMAC-RS]**

## SIMULAÇÃO DA DISPERSÃO DE POLUENTES EM CORPOS HÍDRICOS PARA UM MODELO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE

ALMEIDA, T. F.<sup>1</sup>; RICKES, A. <sup>1</sup>; KONRADT, J. <sup>1</sup>; GARCIA, S. B. C. <sup>2</sup>; WEYMAR, G. J. <sup>2</sup>; FURTADO, I. C. <sup>3</sup>; QUADROS, R. S. <sup>2</sup>; BUSKE, D. <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal de Pelotas, Instituto de Física e Matemática, Curso de Licenciatura em Matemática

<sup>2</sup> Universidade Federal de Pelotas, Instituto de Física e Matemática, Programa de pós graduação em Modelagem Matemática

<sup>3</sup> Instituto Federal Sul-Rio-Grandense

**Palavras-chave:** advecção-difusão, poluição dos corpos hídricos, modelagem matemática, transformada integral

### Resumo

A poluição dos corpos hídricos e formas de minimizá-la têm sido pautas cada vez mais discutidas na atualidade, de modo que a modelagem matemática vem desempenhando um papel essencial para o estudo do comportamento de poluentes quando inseridos em mares e rios. No presente trabalho, foi utilizado o método Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT) para o cálculo da solução de um modelo bidimensional e transiente de advecção-difusão para descrever o transporte de efluentes contaminantes em meios hídricos, e foram realizadas simulações computacionais utilizando dados de experimento de campo com o intuito de validar o modelo utilizado. Os resultados mostram que, comparados aos dados experimentais encontrados na literatura, os dados simulados podem ser utilizados para a modelagem do problema em questão, tornando possível concluir que a metodologia utilizada, além de prática, está de acordo com o processo de dispersão de poluentes que ocorre na realidade.

## (ERMAC – RS) SIMULATION OF POLLUTANT DISPERSION IN WATER BODIES FOR A TWO-DIMENSIONAL TRANSIENT MODEL

**Keywords:** advection-diffusion, pollution of water bodies, mathematical modeling, integral transform

### Abstract

The pollution of water bodies and mechanisms to decrease it have been topics increasingly discussed nowadays and mathematical modeling methods have performed an essential role in the study of the way pollutants behave when injected into rivers and seas. For the present work, it was applied the Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT) with the purpose to calculate the solution of a two-dimensional and transient model of advection-diffusion aiming to describe the transportation of contaminants in water environments. Computational simulations using field experimental data were made in order to validate the model used. Results show that, compared to the experimental data found in the literature, simulated data may be used for modeling the problem studied, making it possible to conclude that the methodology utilized, besides being practical, corresponds to the pollutant dispersion process that occurs in reality

## INTRODUÇÃO

A água é um dos recursos mais importantes para os seres vivos, sendo sua manutenção de grande importância para a sociedade, de modo que, desde a instituição da lei nº 9.433 de 8 de janeiro de 1997 (BRASIL, 1997), o tema da crescente poluição dos mares e rios e maneiras de combatê-la têm sido assuntos cada vez mais debatidos (SILVA et al., 2015; VIANNA, 2015; VIEIRA et al., 2019). Dessa forma, dada a importância do comportamento hidrológico de corpos d'água para o deslocamento de resíduos em meios hídricos (ABREU; CUNHA, 2015), destaca-se o papel da modelagem matemática na redução de danos ambientais causados por agentes poluidores.

Segundo Fan, Bravo e Collischonn (2016), o uso da modelagem matemática para o transporte de efluentes em corpos hídricos “[...] propicia o controle de alterações na qualidade das águas causadas por descargas de poluentes, o licenciamento e planejamento do uso da água, as análises de risco e a tomada de decisão em relação à proteção de mananciais e/ou às captações”. Contudo, é necessário o estudo bem desenvolvido acerca dessa área para a obtenção de modelos e soluções analíticas cada vez mais condizentes com o processo de dispersão de contaminantes que ocorre na realidade (FLECK; TAVERES; EYNG, 2013).

Para a solução de modelos de transporte de resíduos, o método GILTT é um método seguro, já utilizado em diversos trabalhos com o propósito de encontrar a solução de modelos tridimensionais de advecção-difusão para a dispersão de poluentes na atmosfera (BUSKE et al, 2011; VOESE et al, 2018) e, também, de modelos bidimensionais estacionários para a dispersão de poluentes em corpos hídricos (BUSKE et al., 2017). Visto isso, o presente trabalho possui como propósito encontrar a solução de um modelo bidimensional, no plano vertical e longitudinal, e transiente de advecção e difusão para a locomoção de poluentes em recursos hídricos, encontrado em Machado (2019), utilizando o método GILTT. Os resultados simulados apresentam grande concordância com os dados da natureza obtidos na literatura (SOARES; RIBEIRO; GUEDES, 2010), tornando possível a utilização do método GILTT para a solução de modelos de dispersão de contaminantes em meios aquáticos.

## MATERIAL E MÉTODOS

### Modelagem do problema

Neste trabalho, foi utilizado o modelo de dispersão de efluentes em corpos hídricos que se baseia no princípio da conservação das massas e na Lei de Fick. Ainda, foram utilizadas as seguintes hipóteses fundamentais (BARROS, 2004).

- O fluxo de massa na direção vertical é muito maior que na direção transversal;
- A superfície e o leito do rio não são dispersivos, ou seja, não há migração do contaminante através destes contornos;
- O lançamento do poluente é instantâneo;
- A variação da área transversal do rio e de sua altura são desprezíveis;
- As substâncias poluidoras são dissolvidas e têm a mesma densidade do fluido receptor;
- A velocidade de descarga do poluente é considerada desprezível em relação à velocidade longitudinal do rio ou do canal;
- O poluente não sofre degradação química quando inserido no meio hídrico.

Dadas as considerações acima, a equação que caracteriza o modelo bidimensional e transiente para o transporte de uma espécie genérica é dada pela equação:

$$\frac{\partial C(x, z, t)}{\partial t} + U \frac{\partial C(x, z, t)}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C(x, z, t)}{\partial x^2} + D_z \frac{\partial^2 C(x, z, t)}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$M$  - massa de poluente injetada (em mg);  
denominada equação de advecção-difusão bidimensional, onde:

$C=C(x, z, t)$  - concentração média do poluente (em  $\text{mg}/\text{m}^3$ );

$t$  - tempo após injeção (em s);

$x$  e  $z$  - coordenadas longitudinal e vertical da posição, respectivamente (em m);

$U$  - componente da velocidade instantânea do escoamento na direção  $x$  (em  $\text{m}/\text{s}$ );

$D_x$  e  $D_z$  - coeficientes de dispersão nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente (em  $\text{m}^2/\text{s}$ ).

Para a condição inicial, foi utilizada a equação correspondente à injeção instantânea de contaminante por uma fonte situada na superfície do rio:

$$C(x, z, t = 0) = \frac{M}{A} \delta(x) \delta(z - L_z), \quad (2)$$

$\delta$  - função delta de Dirac;

$L_z$  - profundidade do rio (em m).

E, para as condições de contorno, foram utilizadas as seguintes expressões:

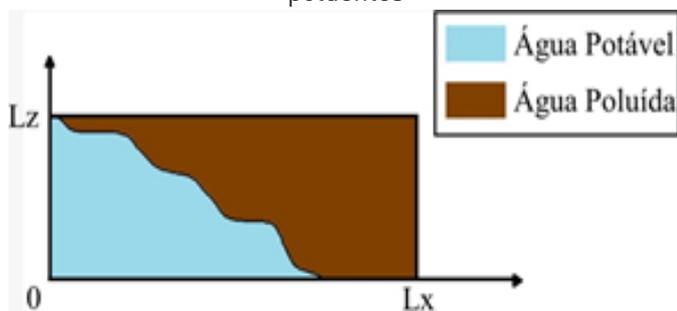
$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad C(L_x, z, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0, L_z} = 0, \quad (3)$$

onde:

$L_x$  - comprimento fictício do rio, suficientemente grande (em m), utilizado pelo fato do método GILTT não ser aplicado a domínios infinitos.

A Figura 1 ilustra o processo de dispersão de um resíduo no sistema de coordenadas empregado nesse trabalho, dando destaque ao domínio delimitado para a aplicação da metodologia.

Figura 1. Ilustração do problema de dispersão de poluentes



Fonte: dos autores

Para a solução do modelo apresentado, será utilizado o método GILTT, que combina a expansão do contaminante em uma série em termos das autofunções determinadas com o auxílio de um problema auxiliar de Sturm-Liouville e a obtenção de uma equação diferencial ordinária na forma matricial, que é resolvida pela transformada de Laplace (BUSKE et al., 2016; SILVEIRA; BUSKE; QUADROS, 2020).

### Solução pelo método GILTT

Essa seção tem como propósito a solução do modelo descrito acima utilizando o método GILTT. Para isso, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned} \varphi''_k(z) + \beta_k^2 \varphi_k(z) &= 0, & 0 < z < L_z, \\ \varphi'_k(0) &= 0 & \text{e} & \quad \varphi'_k(L_z) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

que possui como solução as autofunções:

$$\varphi_k(z) = \cos(\beta_k z), \quad \beta_k = \frac{k\pi}{L_z}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Expandem-se a solução da equação diferencial parcial, Eq. 1, como uma série em termos das autofunções obtidas na Eq. 5:

$$C(x, z, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \tilde{C}_k(x, t) \varphi_k(z) \approx \sum_{k=0}^{K_0} \tilde{C}_k(x, t) \varphi_k(z), \quad (6)$$

onde:

$\tilde{C}_k(x, t)$  - termos a serem determinados;

$K_0$  - índice no qual a soma (6) converge.

Substituindo a solução dada pela Eq. 6 na Eq. 1, aplicando o operador  $\int_0^{L_z} (\cdot) \varphi_l(z) dz$  em ambos os lados da equação resultante e utilizando a relação de ortogonalidade entre funções, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\tilde{C}_k(x, t)] + U \frac{\partial}{\partial x} [\tilde{C}_k(x, t)] - D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\tilde{C}_k(x, t)] + D_z \beta_k^2 \tilde{C}_k(x, t) = 0. \quad (7)$$

Para a resolução da EDP dada na Eq. 7, aplica-se os mesmos passos utilizados anteriormente. Constrói-se o novo problema auxiliar de Sturm-Liouville, que possui como solução as autofunções:

$$\psi_n(x) = \cos(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi}{L_x} \left( \frac{1}{2} + n \right), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

Expandindo a solução da Eq. 7 como uma série em termos das autofunções encontradas na Eq. 8, obtém-se:

$$\tilde{C}_k(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \bar{C}_n(t) \psi_n(x) \approx \sum_{n=0}^{N_0} \bar{C}_n(t) \psi_n(x), \quad (9)$$

onde:

$\bar{C}_n(t)$  - termos a serem determinados;

$N_0$  - índice no qual a soma da Eq. 9 converge.

Substituindo a solução dada pela Eq. 9 na Eq. 7 e aplicando o operador  $\int_0^{L_x} (\cdot) \psi_m(x) dx$  em ambos os lados, obtém-se a equação:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_0} \bar{C}'_n(t) \int_0^{L_x} \psi_n(x) \psi_m(x) dx + U \sum_{n=0}^{N_0} \bar{C}_n(t) \int_0^{L_x} \psi'_n(x) \psi_m(x) dx + \\ + D_x \lambda_n^2 \sum_{n=0}^{N_0} \bar{C}_n(t) \int_0^{L_x} \psi_n(x) \psi_m(x) dx + D_z \beta_k^2 \sum_{n=0}^{N_0} \bar{C}_n(t) \int_0^{L_x} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Reescreve-se a Eq. 10 na forma matricial:  $Y'(t) + FY(t)$  (10)

onde  $F=B^{-1}E$ , e:

$Y(t) = \{\bar{C}_n(t)\}$ ; (11) onde

$B = \{b_{n,m}\}$ , onde  $b_{n,m} = \int_0^{L_x} \psi_n(x) \psi_m(x) dx$ ;

$E = \{e_{n,m}\}$ , onde

$e_{n,m} = U \int_0^{L_x} \psi'_n(x) \psi_m(x) dx + (D_x \lambda_n^2 + D_z \beta_k^2) \int_0^{L_x} \psi_n(x) \psi_m(x) dx$ .

Aplicando na Eq. 2 as mesmas operações realizadas anteriormente, expande-se a condição inicial na forma

matricial:

$$Y(0) = \begin{cases} \frac{2M}{L_z L_x A}, & \text{se } k = 0, \\ \frac{4M}{L_z L_x A} \varphi_k(L_z), & \text{se } k \neq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Para resolver a equação diferencial ordinária matricial, Eq. 11, aplica-se a transformada de Laplace em ambos os lados. Neste problema, assume-se que a matriz  $F$  seja diagonalizável, e escreve-se  $F=DXD^{-1}$ ; onde  $D$  é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de  $F$ ,  $X$  é a matriz cujas colunas constituem os autovetores linearmente independentes de  $F$  e  $X^{-1}$  é sua inversa. Portanto, sendo  $L^{-1}\{s \rightarrow t\}$  a transformada inversa de Laplace, a solução da Eq. 11 será:

$$Y(t) = XL^{-1}\{(sI + D)^{-1}, s \rightarrow t\}X^{-1}Y(0). \quad (13)$$

Denotando por  $d_0, d_1, \dots, d_{N-1}$  os autovalores da matriz  $F$ , calcula-se o termo  $L^{-1}\{(sI + D)^{-1}, s \rightarrow t\}$  da Eq. 13:

$$L^{-1}\{(sI + D)^{-1}, s \rightarrow t\} = \begin{pmatrix} e^{-d_0 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-d_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-d_{N-1} t} \end{pmatrix} = G(t). \quad (14)$$

Com a matriz  $G(t)$  definida na Eq. 14, conclui-se que a solução da EDO matricial, dada pela Eq. 11, é:

$$Y(t) = XG(t)X^{-1}Y(0). \quad (15)$$

Portanto, a solução do modelo bidimensional do deslocamento de poluentes em recursos hídricos, dado pelas Eqs. 1, 2 e 3, será:

$$C(x, z, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \left[ \varphi_k(z) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \bar{C}_n(t) \psi_n(x) \right], \quad (16)$$

onde  $\varphi_k$  está definido na Eq. 5,  $\psi_n$  está definido na Eq. 8 e  $\bar{C}_n(t)$  está definido na Eq. 15.

## RESULTADO E DISCUSSÕES

A partir da solução do modelo bidimensional de advecção-difusão encontrada pelo método GILTT, dada pela Eq. 16, foram elaboradas duas simulações para a dispersão de traçadores no rio Paraibuna realizadas por Soares, Ribeiro e Guedes (2010):

- Para a simulação 1, foram utilizados os dados referentes à injeção do traçador Amidorodamina G Extra, retirados da primeira campanha realizada pelos autores, tomando a coordenada de longitude  $x = 20\text{km}$  e de altura  $z = 1,355\text{ m}$ .

- Para a simulação 2, utilizou-se os dados obtidos na injeção do traçador Uranina (ou Fluoresceína Sódica) realizada na segunda campanha dos autores, tomando a coordenada de longitude  $x = 20\text{ km}$  e de altura  $z = 1,84\text{m}$

Os dados utilizados para as simulações estão reunidos na Tabela 1.

O gráfico da concentração do traçador (em ppb)

Tabela 1. Dados utilizados para as simulações de dispersão de traçadores

	x (km)	z (m)	U (m/s)	M (g)	A (m <sup>2</sup> )	D <sub>z</sub> (m <sup>2</sup> /s)	D <sub>x</sub> (m <sup>2</sup> /s)
Simulação 1	20,000	1,355	0,533	500,000	33,678	12,700	12,700
Simulação 2	20,000	1,840	0,635	516,000	52,560	12,700	12,700

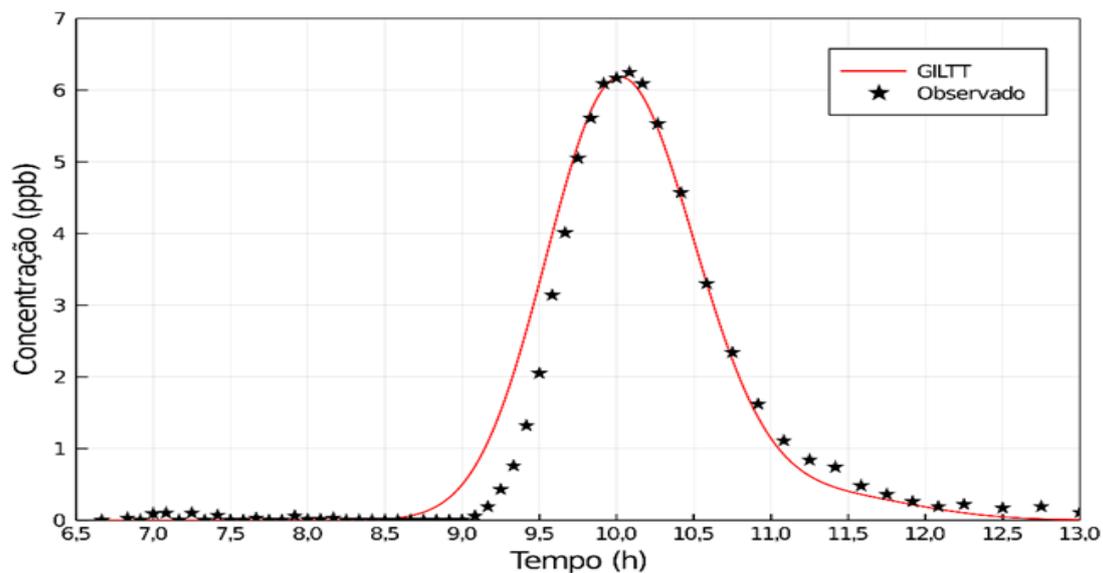
Fonte: Soares, Ribeiro e Guedes (2010)

A Figura 2 apresenta o gráfico da concentração do traçador (em h) em função do tempo (em ppb) referente à simulação 1, em comparação com os dados experimentais observados em Soares, Ribeiro e Guedes (2010).

Pela Figura 2, pode-se observar que a solução analítica fornece uma boa aproximação do processo de

dispersão do traçador que ocorre na realidade. A partir dos dados simulados, é possível estimar o momento no qual ocorre a concentração máxima de contaminante no ponto  $x = 20\text{km}$  e  $z = 1,355\text{m}$ . Entretanto, percebe-se a diferença de cerca de 0,5h do momento no qual a nuvem de traçador atinge essa posição (cerca de 9h).

Figura 2. Comparação entre os dados simulados e experimentais da dispersão do traçador Amidorodamina G Extra no rio Paraibuna analisados no ponto  $x = 20$  km e  $z = 1,355$  m



Fonte: dos autores.

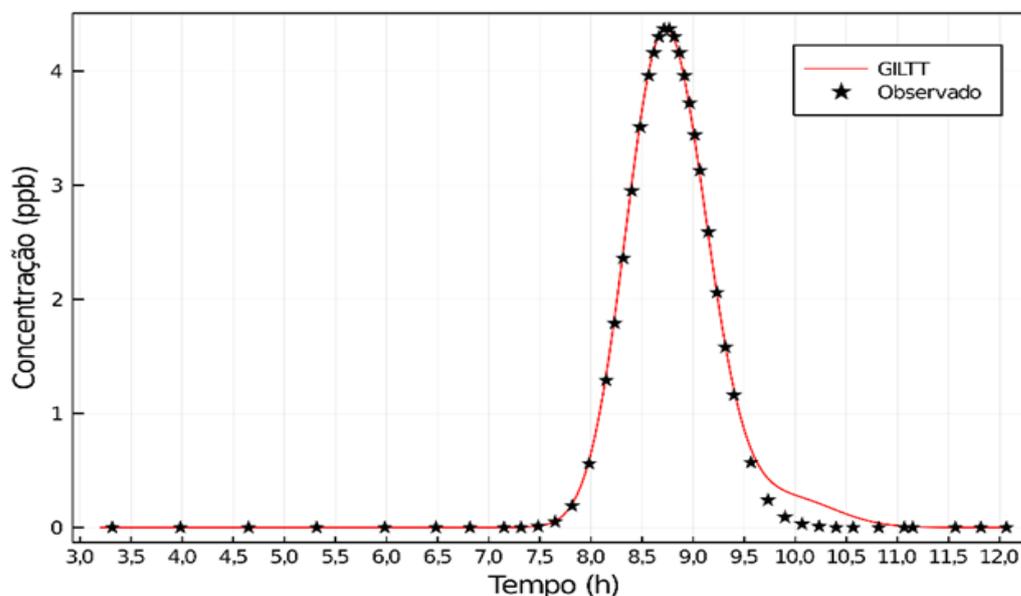
em função do tempo (em h) relativo à simulação 2 é apresentado na Figura 3, e os dados simulados são comparados novamente com os dados experimentais encontrados em Soares, Ribeiro e Guedes (2010).

Pode-se notar que a simulação da Figura 3 é ainda mais precisa que a apresentada na Figura 2, pois, até cerca de 9,5h, os dados simulados apresentam um comportamento de acordo com os dados experimentais, e aproximam rigorosamente o momento e a quantidade de concentração máxima no ponto  $x = 20$  km e  $z = 1,84$  m. Contudo, há uma pequena divergência

entre os dados simulados e os dados do experimento no período de 9,5h até 11h.

Ao comparar as duas figuras, é possível perceber que o pico da concentração no ponto mais próximo da superfície (simulação 1) é mais elevado que o pico da concentração em um ponto mais ao fundo do rio (simulação 2), o que poderia ser esperado, pelo fato da fonte de efluente estar localizada na superfície do corpo hídrico.

Figura 3. Comparação entre os dados simulados e experimentais da injeção do traçador Uranina no rio Paraibuna analisados no ponto  $x = 20$  km e  $z = 1,84$  m



Fonte: dos autores.

## CONCLUSÃO

1. Foi encontrada, através do método Generalizado Integral Laplace Transform Technique (GILTT), a solução do modelo bidimensional transiente de advecção-difusão para o transporte de poluentes em meios hídricos.

2. Foi realizada uma comparação entre os dados simulados da solução obtida e os dados experimentais encontrados na literatura, para a validação da metodologia utilizada.

3. Foi verificado que o método empregado se mostra uma ferramenta eficiente para os propósitos do presente trabalho.

## LITERATURA CITADA

- ABREU, C. H. M.; CUNHA, A. C. Qualidade da água em ecossistemas aquáticos tropicais sob impactos ambientais no baixo Rio Jari-AP: Revisão descritiva. **Biota Amazônica**, v.5, n.2, p.119-131, 2015.
- BARROS, F. P. J. **Modelos multidimensionais para a dispersão de contaminantes em rios e canais: solução híbridas por transformação integral**. Dissertação (Mestrado) - Programas de Pós-Graduação de Engenharia, UFRJ, Engenharia Mecânica. Rio de Janeiro, 2004.
- BRASIL. Lei nº 9.433 de 8 de janeiro de 1997. Institui a Política Nacional de Recursos Hídricos e cria o Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos. Brasília, 1997.
- BUSKE, D.; VILHENA, M. T.; SEGATTO, C. F.; QUADROS, R. S. **A general analytical solution of the advection–diffusion equation for fickian closure**. Birkhauser, Boston: Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications, Organized by: C. Constanda; P. Harris, 2011. Cap.4, v.1, p.25–34.
- BUSKE, D.; PETERSEN, C. Z.; QUADROS, R. S.; GONÇALVES, G. A.; CONTREIRA, J. A. Análise de convergência do método GILTT para problemas em dispersão de poluentes na atmosfera. **Ciência e Natura**, v.38, p.182-189, 2016.
- BUSKE, D.; QUADROS, R. S.; OLIVEIRA, R.; WEYMAR, G. J.; HARTEK, F. P. Analytical solution for contaminant dispersion model in rivers and canals applying the method GILTT. **International Journal of Development Research**, v.7, n.7, p.13857-13864, 2017.
- FAN, F. M.; BRAVO, J. M.; COLLISCHONN, W. Modelagem baseada em agentes para a simulação da dispersão de poluentes em cursos d'água. **Engenharia Sanitária e Ambiental**, v.21, n.4, p.739-746, 2016.
- FLECK, L.; TAVARES, M. H. F.; EYNG, E. Especificidades e importância de modelos matemáticos de qualidade da água. **Revista EIXO**, v.2, n.1, p.106-119, 2013.
- MACHADO, B. R. **Modelagem da dispersão de poluentes em rios e canais sob a perspectiva das abordagens GILTT e separação de variáveis**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ciências Ambientais, UFPel. Pelotas, 2019.
- SILVA, J. C. A.; PORTO, M. F. A.; BRANDIMARTE, A. L.; MARTINS, J. R. S. Utilização de índices físicos, químicos e biológicos para avaliação da qualidade de corpos d'água em processo de recuperação – córrego Ibiraporá, SP. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v.20, n.4, p.959-969, 2015.
- SILVEIRA, V. C.; BUSKE, D.; QUADROS, R. S. Simulation of three-dimensional transient pollutant dispersion in low wind conditions using the 3D-GILTT technique. **Revista Mundi, Engenharia e Gestão**, v.5, n.6, p.1-13, 2020.
- SOARES, J. H. P.; RIBEIRO, A. C. J.; GUEDES, H. A. S. Avaliação da Capacidade de Transporte e Dispersão do Rio Paraibuna Utilizando Traçadores Fluorescentes. Trecho: Distrito Industrial a UHE Marmelos — Juiz de Fora/MG. **Revista Brasileira de Recursos Hídrico**, v.15, n.3, p.45-56, 2010.
- VIANNA, A. M. Poluição ambiental, um problema de

urbanização e crescimento desordenado das cidades.

**Revista SUSTINERE**, v.3, n.1, p.22-42, 2015.

VIEIRA, B. M.; NADALETI, W. C.; VALENTINI, M. H. K.; SANTOS, G.; VIANA, F. V.; CORRÊA, M. G. Avaliação e comparação da qualidade das águas entre o canal São Gonçalo e a Lagoa Mirim. **Revista Ibero Americana de Ciências Ambientais**, v.10, n.2, p.185-196, 2019.

VOESE, J. S.; BUSKE, D.; QUADROS, R. S.; BAINY, B. K.; REIS, J. K. Uma Abordagem Para a Dispersão de Poluentes em Lançamento de Foguetes Considerando Fonte Volume. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, v.3, p.83-1-83-15, 2018.